

## חדו"א ב

### פרק 3 - אינטגרלים לא אמיתיים

#### תוכן העניינים

1.	אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון.....
3.	אינטגרל לא אמיתי מסוג שני .....
4.	אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי.....
5.	שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים.....
6.	מבחני השוואה.....
8.	התכנסות בבחירה.....
9.	בחן דיריכלה.....
10.	התכנסות בתנאי.....

## אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-5:

$$\int_1^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx \quad (3)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (5)$$

6) הוכחו כי  $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\alpha \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$

7) הוכחו כי  $\int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2e} \quad (3)$$

(4) מתבדר :  $\infty$ .

$$\frac{5}{4e^2} \quad (5)$$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

## אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

### תשובות סופיות

- (1) מתבדר :  $\infty$ .
- (2) מתבדר :  $\infty$ .

## אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

### שאלה

1) חשבו את האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ .

### תשובה

1) מתבדר :  $\infty$ .

## שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

### שאלות

**1)** חשבו את השטח בין גرف הפונקציה  $y = e^{2x}$ , הישר  $x=1$  וציר ה- $x$  עבור  $1 \leq x$ .

**2)** חשבו את השטח בין גرف הפונקציה  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , ציר ה- $y$ , ציר ה- $x$  והישר  $x=5$ .

**3)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$ . ידוע כי השטח הכלוא בין גرف הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום  $0 \leq x \leq k$ , שווה לשטח הכלוא בין גرف הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום  $x \geq k$ . מצאו את הקבוע  $k$ .

### תשובות סופיות

$$\frac{1}{2}e^2 \quad (1)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$k = \sqrt[3]{\ln 2} \quad (3)$$

## מבחני השוואה

### שאלות

בדקו את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5} dx \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 4x^2 + 5} dx \quad (1)$$

$$\int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^4} dx \quad (3)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} dx \quad (6)$$

$$\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2} dx \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (10)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1+x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2}-1)} dx \quad (13)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5} \sqrt{(1+x)^5}} dx \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x+\sqrt{x})} dx \quad (15)$$

**תשובות סופיות**

- 1) מתכنس.  
2) מתבדר.  
3) מתכנס.  
4) מתכנס.  
5) מתבדר.  
6) מתבדר.  
7) מתכנס.  
8) מתכנס.  
9) מתבדר.  
10) מתכנס.  
11) מתכנס.  
12) מתבדר.  
13) מתכנס.  
14) מתבדר.  
15) מתכנס.  
16) מתכנס.

## התכנסות בהחלה

### שאלות

**בשאלות 1-3** בדקו האם האינטגרלים מתכנסים :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-10x} \sin 4x dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (3)$$

**4)** הוכיחו : אם  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  מתכנס, אז  $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$  מתכנס.

### תשובות סופיות

- (1) מתכנס.
- (2) מתכנס.
- (3) מתכנס.
- (4) שאלת הוכחה.

## מבחן דיריכלה

### שאלות

הוכיחו כי האינטגרלים הבאים מתכנסים :

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 0) \text{ א.} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## התכנסות בתנאי

### שאלות

קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלה, בתנאי או מתבדרים:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) . \text{ א. } (1)$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) . \text{ ב.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1) . \text{ ג.}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) . \text{ א. } (2)$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) . \text{ ב.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1) . \text{ ג.}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx . \text{ א. } (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x^4)}{x^p} dx . \text{ ב.}$$

$$\int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x-1}} dx . \text{ ג.}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x \sin(\tan x)}{\cos x} dx . \text{ ד.}$$

תשובות סופיות

- 1) א. מתכנס בהחלט עבור  $p < 1$  ומtbodyר עבור  $p \geq 2$ .

ב. מתכנס בהחלט.

ג. מתכנס בהחלט עבור  $2 < p < 1$  ומtbodyר עבור  $p \geq 2$ .

2) א. מתכנס בהחלט.

ב. מתכנס בתנאי.

ג. מתכנס בתנאי.

3) א. מתכנס בתנאי עבור  $1 \leq p < 0$ , מתכנס בהחלט עבור  $2 < p < 1$ , מtbodyר עבור  $p \geq 2$ .

ב. מתכנס בתנאי עבור  $1 < p < -3$ , מתכנס בהחלט עבור  $5 < p < 1$ , מtbodyר עבור  $p \geq 5$ .

4) מתכנס בתנאי.

5) מתכנס בתנאי.